



POWTÓRZENIE WIADOMOŚCI O UKŁADACH RÓWNAŃ

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = -2 \\ 5x - 3y = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$$

MATEMATYKA



Poradnik powstał w wyniku współpracy zespołu nauczycieli, trenerów i autorów:

Monika Góral, Krzysztof Grynienko, Monika Jasińska, Piotr Kryszkiewicz

Powtórzenie wiadomości o układach równań



Czas trwania zajęć: jedna jednostka lekcyjna



Cel zajęć



Cele wynikające z podstawy programowej

Uczeń:

- sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi [7.5];
- rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi [7.6].



Cele operacyjne osiągnane przez uczniów

Uczeń:

- stosuje metodę podstawiania
- stosuje metodę przeciwnych współczynników
- rozpoznaje układy oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne
- potrafi sprawdzić, czy dana para liczb stanowi rozwiązanie danego układu
- potrafi wskazać przykładowe rozwiązanie układu nieoznaczonego



Organizacja lekcji

Infrastruktura

- Układ miejsc przystosowany do pracy w zespołach 2-3 osobowych
- Jedno urządzenie podłączone do Internetu na zespół 2-3 osobowy
- Tablica interaktywna lub tylko rzutnik podłączona do komputera nauczyciela z dostępem do Internetu.

Zasoby

- Filmy z kanału PiEduPI dostępne online (można je zastąpić własnymi):
 - Film 1: Pi-gułka. Układy równań liniowych #1. Układ oznaczony. Dwie metody i ilustracja geometryczna: http://youtu.be/55N1Q3S__8
 - Film 2: Pi-gułka. Układy równań liniowych #2. Układ nieoznaczony. Dwie metody i ilustracja geometryczna: <http://youtu.be/aXDfNranszw>
 - Film 3: Pi-gułka. Układy równań liniowych #3. Układ sprzeczny. Dwie metody i ilustracja geometryczna: <http://youtu.be/QDSCdwwfXE4>
- Strony www z przykładami układów równań liniowych:
 - <http://matematyka.pisz.pl/strona/1672.html>
 - <http://matematyka.pisz.pl/strona/1673.html>
 - <http://matematyka.pisz.pl/strona/1674.html>
- Strony z rozwiązaniami przykładów z punktu poniżej (zachowana odpowiednia kolejność):
 - <http://matematyka.pisz.pl/strona/3786.html>
 - <http://matematyka.pisz.pl/strona/1184.html>
 - <http://matematyka.pisz.pl/strona/1189.html>
- Załącznik nr 1 – układy równań – test przed lekcją
- Załącznik nr 2 – układy równań – test zespołowy na lekcji
- Załącznik nr 3 – układy równań – test po lekcji

Przygotowanie do lekcji

Nauczyciel powinien przed lekcją:

- Udostępnienie uczniom kilka dni przed lekcją trzech filmów z zasobów internetowych wymienionych powyżej lub przygotowanych wcześniej samodzielnie
- Przygotowanie i udostępnienie uczniom kilka dni przed lekcją testu na platformie testującej według Załącznika nr 1 – układy równań – test przed lekcją
- Przygotowanie (ale bez wcześniejszego udostępniania) testu zespołowego na platformie testującej z rankingiem według Załącznika nr 2 – układy równań – test na lekcji
- Przygotowanie (ale bez wcześniejszego udostępniania) testu na platformie według Załącznika nr 3 – układy równań – test zespołowy na lekcji

Czynności po lekcji

- Udostępnienie uczniom notatek w postaci ekranów z tablicy interaktywnej zapisanych w odpowiednich momentach lekcji
- Udostępnienie uczniom zadania domowego w postaci linku do przykładów układów równań
- Udostępnienie uczniom zadania domowego w postaci testu na platformie testującej przygotowanego według Załącznika nr 3 – układy równań – test po lekcji

Przebieg procesu dydaktycznego



LEKCJA

Przed lekcją

Przygotowanie się do lekcji

Przed lekcją przekaz uczniom, że mają:

- oglądnąć trzy filmy wyjaśniające rozwiązywanie układów równań liniowych z dwoma niewiadomymi
- Rozwiązać test przed lekcją

http://youtu.be/55N1Q3S__8

<http://youtu.be/aXDfNranszw>

<http://youtu.be/QDSCdwfwXE4>

[Załącznik nr 1 – układy równań – test przed lekcją na platformie testującej](#)

W czasie lekcji

Czas: 5 min

Organizacja lekcji

Pierwsza część poświęcona jest na sprawy organizacyjne np. sprawdzenie obecności, podział na grupy 2-3 osobowe, zajęcie miejsc przy komputerach, uruchomienie sprzętu.

Czas: 10 min

Przypomnienie wiedzy uzyskanej przed lekcją

Przedstaw uczniom temat lekcji: „Utrwalenie wiedzy o układach równań oraz umiejętności rozwiązywania układów metodami podstawiania oraz przeciwnych współczynników”.

Poproś uczniów w grupach o rozwiązanie testu na platformie Nearpod, który ma na celu przypomnienie wiedzy zdobytej przed lekcją.

Jeden komputer na grupę uczniów z dostępem do internetu.

Ekran z wideoprojektorem.

Załącznik nr 1 – układy równań – test zespołowy na lekcji

Czas: 5 min

Zrozumienie poprawnych rozwiązań testu przez całą klasę

Po zakończeniu testu przez wszystkie grupy wyświetl poprawne odpowiedzi na ekranie i krótko omów rozwiązania.

Ekran z projektorem lub tablica multimedialna

Czas: 18 min

Uporządkowanie, utrwalenie i uogólnienie umiejętności

W tej części uczniowie rozwiązują zadania utrwalające poznane metody rozwiązywania układów, pochodzące z witryny internetowej matematyka.pisz.pl.

Zadanie 1.

Wyświetl na ekranie pierwszy układ równań i poproś uczniów o rozwiązanie go metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

Uczniowie rozwiązują zadanie w parach. Po zakończeniu pracy przez wszystkich uczniów. Poproś chętną osobę o przedstawienie swojego rozwiązania na tablicy.

Następnie udostępni na komputerach uczniów rozwiązanie ze strony:

<http://matematyka.pisz.pl/strona/1189.html>

Zadanie 2.

Wyświetl na ekranie drugi układ równań i poproś uczniów o rozwiązanie go metodą podstawiania:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$$

Czas: **10** min

Uczniowie rozwiązują zadanie w parach. Po zakończeniu pracy przez wszystkich uczniów. Poproś chętną osobę o przedstawienie swojego rozwiązania na tablicy.

Następnie udostępnij na komputerach uczniów rozwiązanie ze strony:

<http://matematyka.pisz.pl/strona/1184.html>

Zadanie 3.

Wyświetl na ekranie drugi układ równań i poproś uczniów o rozwiązanie go dowolną metodą:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x+9y=15 \end{cases}$$

Uczniowie rozwiązują zadanie w parach. Po zakończeniu pracy przez wszystkich uczniów. Poproś chętną osobę o przedstawienie swojego rozwiązania na tablicy.

Następnie udostępnij na komputerach uczniów rozwiązanie ze strony:

<http://matematyka.pisz.pl/strona/3786.html>

Ekran z projektorem lub tablica multimedialna oraz prezentacja Nearpod z zadaniami oraz rozwiązaniami

Układy równań ze strony

Zadanie 1.

<http://matematyka.pisz.pl/strona/1674.html>

Zadanie 2.

<http://matematyka.pisz.pl/strona/1673.html>

Zadanie 3.

<http://matematyka.pisz.pl/strona/1672.html>

Czas: 5 min

Podsumowanie i motywacja

Na koniec udostępni uczniom poprzez formularz Google trzy zadania – na poszczególne oceny. Poproś uczniów o wybranie jednego układu równań i rozwiązanie go w zeszyte oraz przesłanie odpowiedzi poprzez udostępniony formularz.

Układy równań:

Na ocenę 5:

$$\begin{cases} \frac{(x-y)}{4} + \frac{(x+y)}{2} = 5 \\ \frac{(x-y)}{2} - \frac{(x+y)}{3} = 2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest para liczb: $x=7, y=-1$.

Za rozwiązanie z zastosowaniem zmiennych pomocniczych należy wystawić ocenę celującą.

Na ocenę 4:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 7 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest para liczb: $x=12, y=-12$

Na ocenę 3:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 18 \\ -3x + 6y = 18 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest para liczb: $x=10, y=8$

Poproś chętnego ucznia o rozwiązanie wybranego zadania na tablicy. W przypadku braku czasu pozostałe zadania pozostają do rozwiązania w domu.

Udostępnione układy równań w formie formularza Google

Czas: 2 min

Zadania domowe

Zaproponuj uczniom dodatkowy zestaw układów równań do samodzielnego rozwiązania w domu. Udostępnij za pomocą poczty lub podając skrócony odnośnik do strony formularza.

[Załącznik nr 3 – układy równań – test po lekcji](#)

udostępniony za pomocą formularza Google

Po lekcji

Utrwalenie i weryfikacja umiejętności, w tym usamodzielnienie rozwiązywania zadań.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują przykładowe układy równań.

[Załącznik nr 3 – układy równań – test po lekcji](#)

za pomocą formularza Google

Informacje metodyczne

Metodyka lekcji

Nauczanie hybrydowe (z ang. blended learning) łączy w sobie samodzielną pracę odbywającą się w czasie wybranym przez każdego z uczniów z wykorzystaniem edukacyjnych programów wraz z nauczaniem odbywającym się wspólnie z innymi uczniami i nauczycielem w klasie.

W podejściu hybrydowym część nauczania w szkole koncentruje się na wspólnym rozwiązywaniu problemów, prezentowaniu i dyskutowaniu poglądów oraz jawnym ocenianiu wyników prac indywidualnych i zespołowych. Bezpośredni kontakt ucznia z nauczycielem w klasie daje mu możliwość wyjaśnienia trudnych i niezrozumiałych zagadnień, natomiast kontekst klasowy służy wykorzystaniu społecznych mechanizmów nauki w grupach – współpraca, wzajemne nauczanie siebie, rywalizacji pomiędzy grupami.

Etap nauki samodzielnej realizowany jest w środowisku wirtualnym w postaci edukacyjnych aplikacji komputerowych, interaktywnych testów sprawdzających automatycznie poprawność rozwiązania, a także cyfrowych zasobów (przykładów rozwiązań, filmów edukacyjnych) dostępnych w Internecie. Ta forma umożliwia uczniowi samodzielną naukę w dowolnym miejscu oraz jego indywidualnym tempie nauki. Różnorodność dostępnych cyfrowych zasobów edukacyjnych ułatwia stosowanie różnych strategii nauki samodzielnej.

W tym scenariuszu zastosowano filmy edukacyjne udostępnione uczniom przed lekcją jako materiał do powtórzenia wiadomości o rozwiązywaniu układów równań. Do sprawdzenia umiejętności i zdobytej wiedzy, a także ewaluacji celów lekcji wykorzystano test przeprowadzony na platformie testującej online zarówno przed jak i po lekcji. W czasie lekcji również zastosowano test, ale rozwiązywany w zespolech.

Możliwości zastosowania modelu na innych lekcjach

Przedstawiony model lekcji dostosowany jest do powtórzenia i podsumowania tematów. Niezbędnym elementem są filmy lub inne wirtualne formy prezentujące lub przypominające podstawowy materiał przed lekcją oraz trzy testy, z których dwa (przed- i po lekcji) mają charakter sprawdzający i ewaluacyjny, a środkowy, połączony z elementami współpracy w zespole ma bardziej charakter motywujący do czynnego udziału w lekcji.

ZOBACZ PORADNIK

NAUCZANIE HYBRYDOWE



SCENARIUSZ 14

ZAŁĄCZNIK NR 1 – UKŁADY RÓWNAŃ – TEST PRZED LEKCJĄ

Uwagi techniczne

Test należy umieścić na wybranej platformie testującej (np. formularz Google) jako test jednokrotnego wyboru.

Zadania

Zadanie 1

Pytanie

Rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases}$$

jest para liczb:

Odpowiedzi

- $x = 3, y = 1$
- $x = -1, y = 3$
- $x = 1, y = -3$
- $x = 3, y = -1$

Zadanie 2

Pytanie

Rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ -x+\frac{1}{2}y=-3 \end{cases}$$

NIE JEST para liczb:

Odpowiedzi

- $x = 2, y = -2$
- $x = 0, y = -6$
- $x = 2, y = 1$
- $x = 1, y = -4$

Zadanie 3

Pytanie

Układ

$$\begin{cases} 3x-y=7 \\ 6x+ay=b \end{cases}$$

jest nieoznaczony, jeśli:

Odpowiedzi

- $a = -2, b = 14$
- $a = 2, b = 14$
- $a = -2, b = -14$
- $a = 2, b = -14$

Zadanie 4

Pytanie

Układ

$$\begin{cases} x+ay=3 \\ 2x+4y=b \end{cases}$$

jest sprzeczny, jeśli:

Odpowiedzi

- $a = 2, b = 6$
- $a = 2, b = -6$
- $a = -2, b = 6$
- $a = -2, b = -6$

Zadanie 5

Pytanie

Jeżeli jedno z równań układu, po pomnożeniu obu stron przez 10, staje się identyczne z drugim równaniem, to ten układ jest:

Odpowiedzi

- oznaczony
- nieoznaczony
- sprzeczny
- za mało danych, aby stwierdzić który z powyższych

Zadanie 6

Pytanie

Jeśli układ równań jest oznaczony, to:

Odpowiedzi

- ma co najmniej dwie pary rozwiązań
- ma dokładnie jedną parę rozwiązań
- nie ma rozwiązań
- jedno z równań można przekształcić do drugiego równania

Zadanie 7

Pytanie

Podczas bezbłędneho rozwiązywania układu równań metodą podstawiania pojawiło się równanie $x = 7$. Wynika stąd, że:

Odpowiedzi

- ten układ jest nieoznaczony
- ten układ jest oznaczony
- ten układ jest sprzeczny
- metoda przeciwnych współczynników da inny wynik



SCENARIUSZ 14

ZAŁĄCZNIK NR 2 – UKŁADY RÓWNAŃ – TEST ZESPOŁOWY NA LEKCJI

Uwagi techniczne

Test należy umieścić na wybranej aplikacji do realizacji testów w klasie (np. Nearpod lub Kahoot) pokazującej na bieżąco wyniki każdego z zespołów.

Zadania

Zadanie 1

Pytanie

Rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

jest para liczb:

Odpowiedzi

- $x=1, y=2$
- $x=2, y=1$
- $x=0, y=2$
- $x=1, y=0$

Zadanie 2

Pytanie

Rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} 2x+y=8 \\ x+\frac{1}{2}y=4 \end{cases}$$

NIE JEST para liczb:

Odpowiedzi

- $x=0, y=8$
- $x=1, y=6$
- $x=2, y=4$
- $x=4, y=8$

Zadanie 3

Pytanie

Układ

$$\begin{cases} 2x-y=-13 \\ -4x+ay=26 \end{cases}$$

jest nieoznaczony, jeśli:

Odpowiedzi

- $a=-2$
- $a=2$
- $a=-4$
- $a=4$

Zadanie 4

Pytanie

Układ

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 10x-by=a \end{cases}$$

jest sprzeczny, jeśli:

Odpowiedzi

- $a=-30, b=-20$
- $a=-30, b=20$
- $a=30, b=-20$
- $a=30, b=20$

Zadanie 5

Pytanie

Jeżeli po prawidłowych przekształceniach lewe strony obu równań układu są identyczne, a prawe strony są różne, to ten układ jest:

Odpowiedzi

- oznaczony
- nieoznaczony
- sprzeczny
- za mało danych, aby stwierdzić który z powyższych

Zadanie 6

Pytanie

Jeśli układ równań ma dokładnie jedną parę rozwiązań, to jest to układ:

Odpowiedzi

- sprzeczny
- oznaczony
- nieoznaczony
- nie wiadomo, dopóki nie zobaczymy rozwiązania

Zadanie 7

Pytanie

Podczas poprawnego rozwiązywania układu równań metodą przeciwnych współczynników pojawiło się równanie $0=7$. Wynika stąd, że:

Odpowiedzi

- ten układ jest nieoznaczony
- ten układ jest oznaczony
- ten układ jest sprzeczny
- jednym z rozwiązań jest 0, a drugim 7.



SCENARIUSZ 14

ZAŁĄCZNIK NR 3 – UKŁADY RÓWNAŃ – TEST PO LEKCJI

Uwagi techniczne

Test należy umieścić na wybranej platformie testującej (np. formularze Google) jako test jednokrotnego wyboru.

Zadania

Zadanie 1

Pytanie

Rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

jest para liczb:

Odpowiedzi

- $x = 3, y = 1$
- $x = -1, y = 3$
- $x = 1, y = -3$
- $x = 3, y = -1$

Zadanie 2

Pytanie

Rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + \frac{1}{2}y = -3 \end{cases}$$

NIE JEST para liczb:

Odpowiedzi

- $x = 2, y = -2$
- $x = 0, y = -6$
- $x = 2, y = 1$
- $x = 1, y = -4$

Zadanie 3

Pytanie

Układ

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 6x + ay = b \end{cases}$$

jest nieoznaczony, jeśli:

Odpowiedzi

- $a = -2, b = 14$
- $a = 2, b = 14$
- $a = -2, b = -14$
- $a = 2, b = -14$

Zadanie 4

Pytanie

Układ

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + 4y = b \end{cases}$$

jest sprzeczny, jeśli:

Odpowiedzi

- $a = 2, b = 6$
- $a = 2, b = -6$
- $a = -2, b = 6$
- $a = -2, b = -6$

Zadanie 5

Pytanie

Jeżeli jedno z równań układu, po pomnożeniu obu stron przez 10, staje się identyczne z drugim równaniem, to ten układ jest:

Odpowiedzi

- oznaczony
- nieoznaczony
- sprzeczny
- za mało danych, aby stwierdzić który z powyższych

Zadanie 6

Pytanie

Jeśli układ równań jest oznaczony, to:

Odpowiedzi

- ma co najmniej dwie pary rozwiązań
- ma dokładnie jedną parę rozwiązań
- nie ma rozwiązań
- jedno z równań można przekształcić do drugiego równania

Zadanie 7

Pytanie

Podczas bezbłędnego rozwiązywania układu równań metodą podstawiania pojawiło się równanie $x = 7$. Wynika stąd, że:

Odpowiedzi

- ten układ jest nieoznaczony
- ten układ jest oznaczony
- ten układ jest sprzeczny
- metoda przeciwnych współczynników da inny wynik



**LABORATORIUM
DYDAKTYKI CYFROWEJ**

**DLA SZKÓŁ WOJEWÓDZTWA
MAŁOPOLSKIEGO**